ECUACIONES PARAMÉTRICAS

CONTENIDO

Hemos visto, que si un ***lugar geométrico*** tiene una representación analítica, la cual es una sola ecuación que contiene dos variables. Ahora veremos la representación analítica de una curva utilizando dos ecuaciones, que se llaman ecuaciones ***paramétricas*** de la curva.

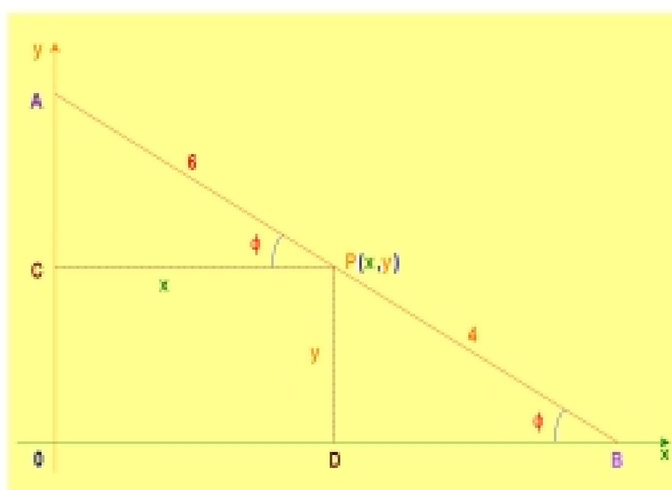
Reciben este nombre aquellas ecuaciones en que las variables **x** y **y**, cada una separadamente, están expresadas en función de la misma tercera variable. Según esto, designando por la letra **z** la tercera variable, comúnmente llamada variable ***paramétrica***, estas ecuaciones se representan en la siguiente forma general:

$$x = F(z)$$
$$y = F(z)$$

Es muy importante aclarar que cada dos ecuaciones ***paramétricas*** representan una sola curva perfectamente referida a un sistema de ejes cartesianos, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

1. De la elipse

EJEMPLO. Un segmento de recta de **10** cm de longitud se mueve apoyando sus extremos en los ejes de coordenadas. **Determinar** el ***lugar geométrico*** descrito por un punto ***P(x, y)*** situado sobre el segmento $\overline{AB}$ a **4** cm del extremo que se apoya sobre el eje de las **x**, como se muestra en la ***figura*** adjunta:



AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

SOLUCIÓN

Observando la ***figura*** anterior se tienen las funciones trigonométricas:

$$\cos\varphi = \frac{x}{6} \text{ y } \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{4}$$

Por tanto despejando:

$$\mathbf{x = 6\cos\varphi}$$
$$\mathbf{y = 4\operatorname{sen}\varphi}$$

Estas son las ecuaciones ***paramétricas*** del ***lugar geométrico*** descrito, pero necesitamos transformarlas para que podamos identificar, e incluso, para que podamos darnos cuenta de que las dos ecuaciones ***paramétricas*** representan una sola curva.

Elevando al cuadrado las dos ecuaciones anteriores:

$$\frac{x^2}{36} = \cos^2\varphi$$
$$\frac{y^2}{16} = \operatorname{sen}^2\varphi$$

Sumando miembro a miembro:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = \operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi$$

Pero se sabe que: $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

Sustituyendo tenemos:

$$\mathbf{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

Por el resultado obtenido, vemos que el ***lugar geométrico*** descrito por ***P*** es una ***elipse horizontal***, con ***centro*** en el ***origen***, cuyos ***semiejes*** miden **6** y **4**.

Este problema nos hace ver que toda ***elipse*** como la que acabamos de ver con semiejes **a** y **b**, esta representada por las siguientes ecuaciones ***paramétricas***:

$\mathbf{x = a\cos\varphi}$ .... **I**
$\mathbf{y = b\operatorname{sen}\varphi}$ .... **I'**

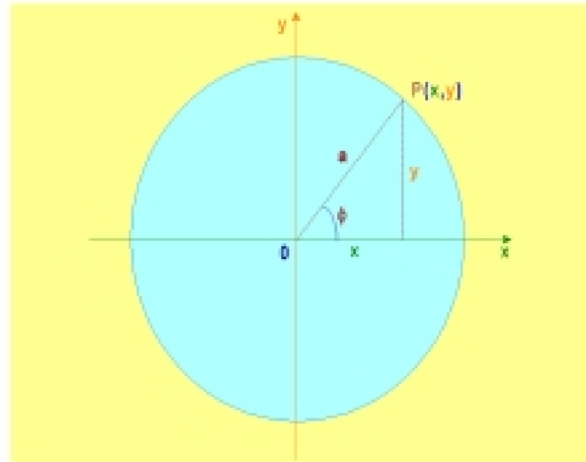
Si la ***elipse*** es ***vertical*** con ***centro*** en el ***origen***, sus ecuaciones ***paramétricas*** son:

$\mathbf{x = b\cos\varphi}$ .... **II**
$\mathbf{y = a\operatorname{sen}\varphi}$ .... **II'**

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

2. De la circunferencia:

Para el caso de una ***circunferencia*** de radio **a** y parámetro **φ**, también con ***centro*** en el ***origen***. Si ***P(x, y)*** es un punto cualquiera de la curva, las ecuaciones ***paramétricas*** de acuerdo a la ***figura*** adjunta son:



Considerando a ***P*** un punto cualquiera de la curva y **a** como el ***radio*** de la ***circunferencia***.

De la ***figura*** se tiene:

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{y}{a}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{a}$$

Despejando tendremos las ecuaciones ***paramétricas***:

y = a sen φ .... **III**

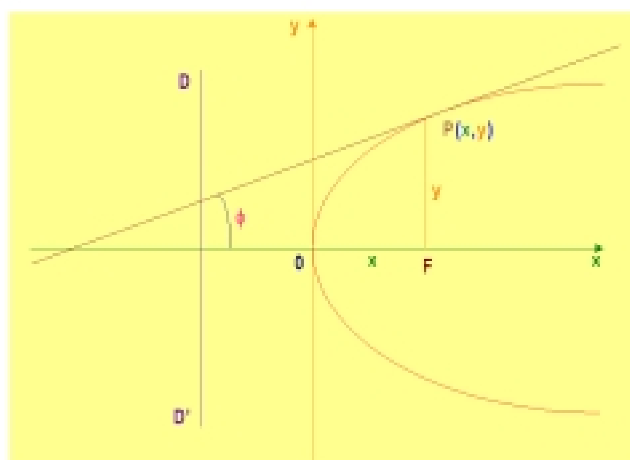
x = a cos φ .... **III'**

En este caso observamos que el coeficiente **a** es el mismo, puesto que representa el ***radio*** de la ***circunferencia***.

3. De la parábola

Se sabe que para este tipo de curva la ecuación es:

$$y^2 = 2px \qquad (1)$$



La cual es la ecuación de una ***parábola horizontal*** con ***vértice*** en el ***origen***. **φ** es el ***ángulo*** de inclinación de la ***tangente*** a la ***parábola*** en el punto ***P***, como se muestra en la ***figura*** adjunta.

También se sabe que el valor de la pendiente ***m*** de una ***recta*** tangente a una ***parábola***, si se conoce el punto de tangencia, es:

$$\tan\varphi = m = \frac{y}{2x} \qquad \text{.......................}(2)$$

Por lo que de la ecuación (1), despejando a 2x:

$$2x = \frac{y^2}{p} \quad \text{...(3)}$$

Sustituyendo (3) en (2), se tiene:

$$\tan\ \varphi = \frac{y}{\frac{y^2}{p}} = \frac{py}{y^2} = \frac{p}{y}$$

Es decir que:

$$\tan\varphi = \frac{p}{y}$$

Por lo tanto la función trigonométrica:

$$\cot\ \varphi = \frac{y}{p}$$

Despejando a y:

$$y = p\cot\varphi \quad \text{...IV}$$

Según la ecuación (3) tendremos:

$$x = \frac{p^2\cot^2\varphi}{2p}$$

De donde:

$$x = \frac{p}{2}\cot^2\varphi \quad \text{...IV'}$$

Que son las ecuaciones ***paramétricas*** de la ***parábola horizontal*** con ***vértice*** en el ***origen***.

De la misma manera, partiendo de la ecuación de la ***parábola vertical*** con ***vértice*** en el ***origen***, las ecuaciones ***paramétricas*** correspondientes son:

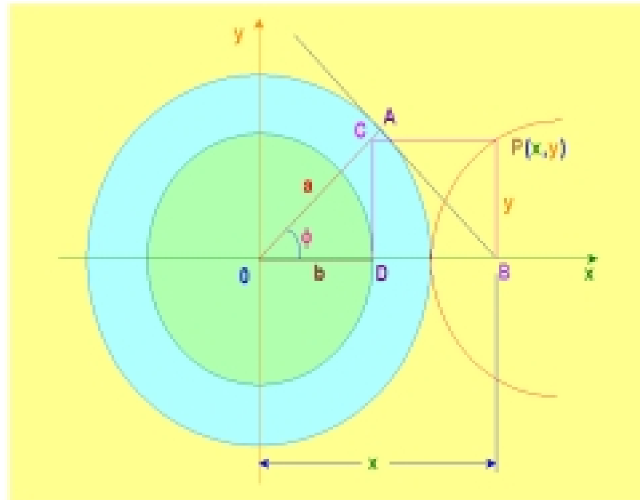
$$x = p\tan\varphi \quad \text{...V}$$

$$y = \frac{p}{2}\tan^2\varphi \quad \text{...V'}$$

4. De la hipérbola

Trazamos dos ***circunferencias*** concéntricas con ***centro*** común en el ***origen***, de radio

$\overline{0A} = a$, y de radio $\overline{0D} = b$ y consideramos un punto ***P(x, y)*** cualquiera, según la ***figura*** siguiente:



En el triángulo rectángulo ***0AB*** la función trigonométrica:

$$\sec \varphi = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{x}{a}$$

Despejando:

$$\mathbf{x = a \sec \varphi} \qquad \text{VI}$$

De la misma forma, en el triángulo rectángulo ***0CD***, tenemos la función:

$$\tan g\, \varphi = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{y}{b}$$

Despejando:

$$\mathbf{y = b \tan \varphi} \quad \text{...VI'}$$

Que son las ecuaciones paramétricas de la ***hipérbola horizontal*** con ***centro*** en el ***origen***.

Para obtener la ecuación rectangular de una curva a partir de las ecuaciones ***paramétricas***, se obtiene normalmente eliminando el ***parámetro***, mediante procedimientos y conocimientos vistos en álgebra y en la geometría y trigonometría como veremos a continuación.

5. Ejercicios.

1. **Obtener** la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones ***paramétricas*** son:

$$\mathbf{x = 8t + 3} \quad \text{...(1)}$$
$$\mathbf{y = 4t + 2} \quad \text{...(2)}$$

SOLUCION

Despejando el parámetro **t**, tenemos: De **(1)**:

$$t = \frac{x - 3}{8} \quad \text{...(3)}$$

De **(2)**:

$$t = \frac{y - 2}{4} \quad \text{...(4)}$$

Igualando **(3)** y **(4)**:

$$\frac{x-3}{8}=\frac{y-2}{4}$$

Quitando denominadores:

$$4(x-3)=8(y-2)$$

Haciendo operaciones

$$4x-12=8y-16$$
$$4x-8y+4=0$$
$$\mathbf{x-2y+1=0}$$

La ecuación representa a una ***línea recta***, en su forma general.

2. **Obtener** la ecuación rectangular de la curva dada por las ecuaciones:

$$x^2=3\cos^2\varphi \quad \text{...}(1)$$
$$y^2=3\,\text{sen}^2\varphi \quad \text{...}(2)$$

SOLUCION

De **(1)** despejando:

$$\cos^2\varphi=\frac{x^2}{3} \quad \text{...}(3)$$

De **(2)** despejando:

$$\text{sen}^2\varphi=\frac{y^2}{3} \quad \text{...}(4)$$

Sumando **(3)** y **(4)** miembro a miembro:

$$\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}$$

Pero como: $\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1$. Por tanto:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}=1$$

Simplificando quitando denominadores:

$\mathbf{x^2+y^2=3}$ Que representa a una ***circunferencia***.

3. **Encontrar** las ecuaciones ***paramétricas*** de la curva dada por la ecuación: $\mathbf{x^2-y-2x-3=0}$, con : $\mathbf{x=t+1}$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

SOLUCIÓN

Despejando **y** de la ecuación dada tenemos:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Sustituyendo el valor de $x = t + 1$ queda:

$$y = (t + 1)^2 - 2(t + 1) - 3$$
$$y = t^2 + 2t + 1 - 2t - 2 - 3$$
$$y = t^2 - 4$$

Como se indico que: $x = t + 1$

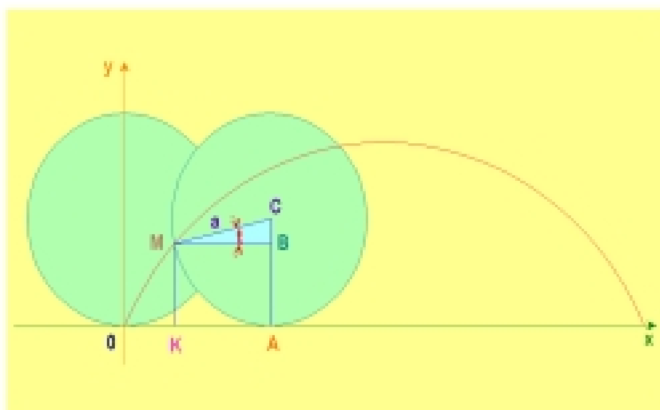
Las ecuaciones ***paramétricas*** son:

$$x = t + 1$$
$$y = t^2 - 4$$

4. Una ***circunferencia*** de radio **a** rueda sobre una ***recta*** sin deslizarse. **Determinar** la ***trayectoria*** de un punto dado de la ***circunferencia***.

SOLUCION

Supongamos que en un cierto instante el punto dado **M** es el punto de contacto de la ***circunferencia*** con la recta en cuestión. Tomemos este punto como origen del sistema de coordenadas y la ***recta*** dada como eje **Ox**. Lo que expresamos por medio de la ***figura*** adjunta:



Supongamos ahora que **M** es un punto cualquiera de la trayectoria buscada y **x**, **y** sus coordenadas.

Llamemos **t** al ángulo ***MCB***. Tendremos entonces que:

$$\overline{OK} = \overline{OA} - \overline{KA} \quad \text{.......................................}(1)$$

Y como:

$$\overline{OK} = x \quad ; \quad \overline{OA} = at \quad ; \quad \overline{KA} = \overline{MB} = a \operatorname{sen} t$$

Por lo tanto sustituyendo en **(1)**.

$$x = at - a \operatorname{sen} t$$
$$x = a(t - \operatorname{sen} t) \quad \text{.......................................}(2)$$

De la misma forma como:

$\overline{KM} = \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$ ....(3)

Pero:

$\overline{KM} = y$; $\overline{AC} = a$; $\overline{BC} = a \cos t$

Sustituyendo en (3) nos queda:

$y = a - a \cos t$

$y = a\,(1 - \cos t)$ ....(4)

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria buscada, que se denominan ***cicloide*** son (2) y (4).

6. Trazado de una curva dadas sus ecuaciones paramétricas.

En forma directa se le asignan valores ordenados al ***parámetro*** con lo cual las ecuaciones ***paramétricas*** determinan los valores correspondientes a **x**, **y**, que representan las coordenadas de un punto de la curva. Uniendo los puntos así determinados resulta una curva, que es la representación gráfica de las ecuaciones ***paramétricas***. Así tenemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. **Trazar** la curva cuyas ecuaciones ***paramétricas*** son: $x = 6 \cos \varphi$ y $y = 4 \operatorname{sen} \varphi$

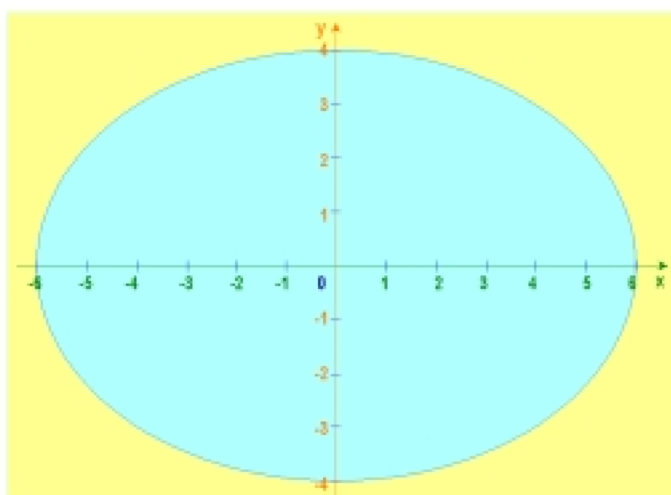
SOLUCION

Asignamos diferentes valores al parámetro ϕ, en este caso

La siguiente tabla de tabulación muestra los valores de **x** y **y** en función de ϕ, los cuales los representamos en un sistema de ejes cartesianos.

φ	x	y
0^0	6	0
$30^0=\pi/6$	$3\sqrt{3}$	2
$60^0=\pi/3$	3	$2\sqrt{3}$
$90^0=\pi/2$	0	4
$120^0=2\pi/3$	-3	$2\sqrt{2}$
$150^0=5\pi/6$	$-3\sqrt{3}$	2
$180^0=\pi$	-6	0
$270^0=3\pi/2$	0	-4
$360^0=2\pi$	1	0

La ***figura*** siguiente presenta la gráfica de los valores calculados. La gráfica representa una ***elipse***.



Ejemplo 2. **Trazar** la curva representada por las ecuaciones ***paramétricas***:

$$x^2 = 4\cos^2\varphi \quad , \quad y^2 = 4\,\text{sen}^2\,\varphi$$

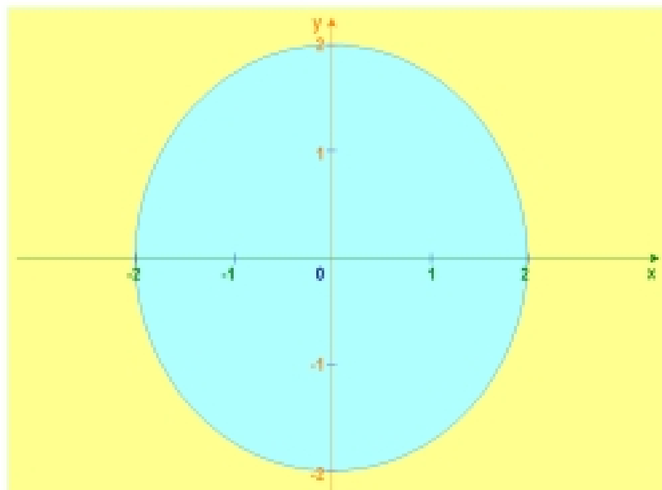
SOLUCION

Procediendo de acuerdo a lo indicado.

La siguiente tabla de tabulación presenta los valores de **x** y **y** en función de ϕ

φ	x	y
0	± 2	0
$\pi/2$	0	± 2
$\pi/3$	± 1	$\pm\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\pm\sqrt{2}$	$\pm\sqrt{2}$

La siguiente ***figura*** muestra los resultados obtenidos. La gráfica representa una ***circunferencia***.



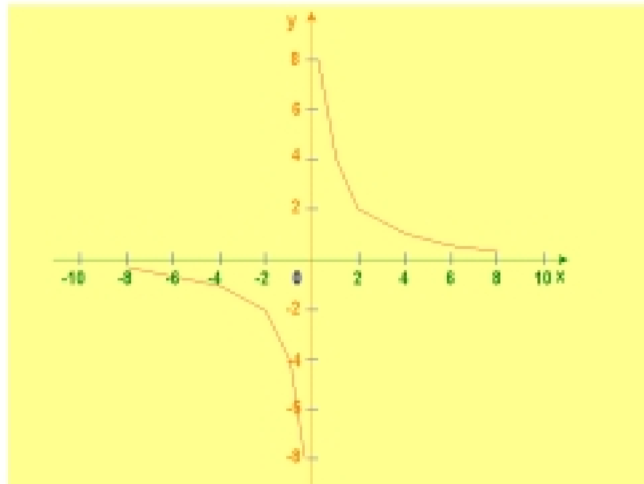
Ejemplo 3.- **Dibujar** la curva cuyas ecuaciones ***paramétricas*** son: $x = 2t$ y $y = \dfrac{2}{t}$

SOLUCIÓN

Sustituyendo cada uno de los valores asignados al parámetro **t** en las ecuaciones dadas determinamos las correspondientes a **x**, **y** como se presentan en la tabla de tabulación siguiente.

t	x	y
$\pm = \frac{1}{4}$	$\pm = \frac{1}{2}$	$\pm = 8$
$\pm = \frac{1}{2}$	$\pm = 1$	$\pm = 4$
$\pm = 1$	$\pm = 2$	$\pm = 2$
$\pm = 2$	$\pm = 4$	$\pm = 1$
$\pm = 3$	$\pm = 6$	$\pm = \frac{2}{3}$
$\pm = 4$	$\pm = 8$	$\pm = \frac{1}{2}$

Llevando los valores de **x**, **y** al sistema de ejes cartesianos y uniendo los diferentes puntos tenemos la siguiente ***figura***. La curva es una ***hipérbola equilátera***.



Ejemplo 4. **Representar** la curva cuyas ecuaciones ***paramétricas*** son: $x = \frac{1}{2}t^2 \ ; \ y = \frac{1}{4}t^3$

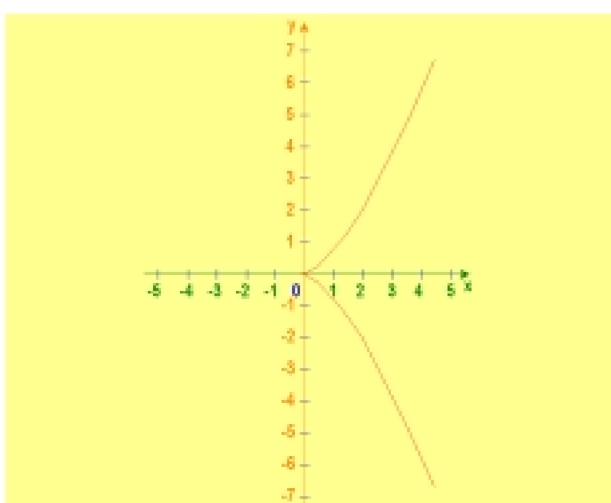
SOLUCION

Sustituyendo los valores asignados a **t** en las ecuaciones ***paramétricas*** dadas, obtendremos las correspondientes a **x, y**.

La siguiente tabla representa los valores de **x**, **y**.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5
y	-6.74	-2	-0.25	0	-0.25	2	6.75

Representando los valores de **x, y** en un sistema de ejes cartesianos y uniendo los diferentes puntos, trazamos la gráfica. La curva es una ***parábola semi-cúbica***.



AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Nombre de archivo:	ecuaciones parametricas
Directorio:	C:\Geometria_analitica
Plantilla:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Plantillas\Normal.dot
Título:	ECUACIONES PARAMÉTRICAS
Asunto:	
Autor:	Pablo Fuentes Ramos
Palabras clave:	
Comentarios:	
Fecha de creación:	09/04/02 12:02 P.M.
Cambio número:	32
Guardado el:	05/06/02 04:54 P.M.
Guardado por:	Pablo Fuentes Ramos
Tiempo de edición:	1,103 minutos
Impreso el:	05/06/02 05:43 P.M.

Última impresión completa

Número de páginas:	10
Número de palabras:	1,500 (aprox.)
Número de caracteres:	8,554 (aprox.)